Die chromatische Zahl der Kneser-Graphen

Ceren Gülcelik

21. November 2019

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Der Zahlentheoretiker Martin Kneser stellt 1955 die Frage nach der kleinsten Anzahl von Farben bzw. Farbklassen, die benötigt werden, um die Ecken der Kneser-Graphen $K(n,k)$ so zu färben, dass benachbarten Ecken stets unterschiedliche Farben zugewiesen werden.
Das durch Kneser formulierte Problem entpuppt sich als eine große Herausforderung der Graphentheorie. Im Rahmen seiner Überlegungen gelangt er schließlich zur Kneser-Vermutung, welche zwei Jahrzehnte später jeweils durch Lászlo Lovász, sowie durch Imre Bárány unter Verwendung des Borsuk-Ulam-Satzes aus der Topologie bewiesen wird. 2002 gelingt es dem Bachelor-Studenten Joshua Greene das Bárány-Argument noch weiter zu vereinfachen. Seine Version des Beweises wird im Folgenden vorgestellt.

1.1 Ein kurzer Einblick in die Graphentheorie

Bevor wir beginnen, klären wir zwei Kernbegriffe aus der Graphentheorie.

1.1.1 Was ist ein Graph?

Ein **Graph** ist eine abstrakte Struktur, die eine Menge von Objekten zusammen mit den zwischen ihnen bestehenden Beziehungen darstellt.

Definition (Graph): *Ein Graph ist geordnetes Paar (V, E), wobei*

V, Menge von Knoten (engl. vertices)

E, Menge von Kanten (engl. edges).

Hierbei repräsentieren die Knoten (andere Bez.: Ecken) die Objekte der Menge V, und die Kanten (auch Bögen genannt) jeweils ein Paar zweier (sog. benachbarter) Ecken.

1.1.2 Was ist eine Färbung?

Definition (Färbung eines Graphen): *Unter einer (Ecken-)Färbung eines Graphen G versteht man die Abbildung*

$$c : V \to \{1, 2, ..., m\},\ A \mapsto c(A),$$

sodass benachbarten Ecken unterschiedliche Farben zugewiesen werden.

Man nennt eine solche Färbung auch die *zulässige Färbung* eines Graphen G. Desweiteren sei darauf hingewiesen, dass diese Definition sicherstelllt, dass jedem Knoten genau eine Farbe zugeordnet wird.

1.2 Der Kneser-Graph

Gegenstand unserer Betrachtungen in diesem Artikel ist der Kneser-Graph, welcher, wie der Name vermuten lässt, zu der Familie der Graphen gehört.

Der Kneser-Graph $K(n, k)$ ist definiert für $n \geq k \geq 1,\ n, k \in \mathbb{N}$.

Dabei wird die Eckenmenge $V(n, k)$ des Graphen festgelegt durch
$V(n, k) = \{$alle k - elementigen Teilmengen der Menge $\{1, 2, ..., n\}\}$, deren Objekte in folgender Beziehung zueinander stehen:

zwei k - Mengen A, B $\in V(n, k)$ benachbart $\Leftrightarrow$ A und B sind disjunkt.

Aus dieser Beziehung erhalten wir die Menge aller benachbarten Eckenpaare unseres Graphen, also die Kantenmenge
$E(n, k) = \{\{A, B\} : A, B \in V(n, k), A \cap B = \emptyset\}$.

Der so beschriebene Graph besteht also aus $|V(n, k)| = \binom{n}{k}$ Knotenpunkten. Ein berühmtes Beispiel ist der Peterson-Graph,

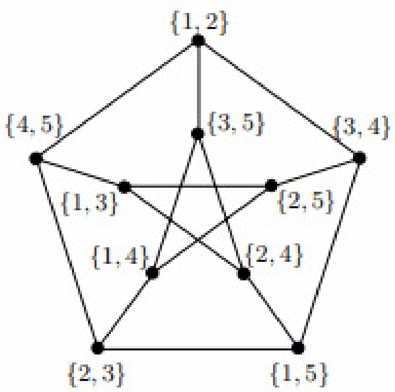


Abbildung 1: K(5, 2) (Peterson-Graph)

welchen wir mit K(5, 2) erhalten.
Man kann an diesem Graphen leicht ablesen, dass ein Paar disjunkter k - Mengen stets benachbart ist, während Paare sich schneidender Mengen kantenfrei sind.
Wenn nun $n < 2k$ ist, schneiden sich zwei k - Mengen $A, B \in V(n, k)$ immer.

Das ist klar, denn wählen wir eine beliebige k - Menge $A \subseteq \{1, 2, ..., n\}$, so gibt es $n - k < 2k - k = k$, also weniger als k Elemente, um eine disjunkte k - elementige Teilmenge B zu konstruieren. Wir müssen also mindestens ein Element aus A wählen $\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$. In diesem Fall gibt es also keine benachbarten Ecken, der Graph besteht somit aus einzelnen Punkten ohne Kanten, man kann daher den Graphen mit einer Farbe färben.
Um diesen trivialen Fall auszuschließen, setzen wir daher von nun an $n \geq 2k$ voraus, sei also $n := 2k + d,\ d \geq 0, k \geq 1,\ d, k \in \mathbb{N}$.

1.2.1 Die Kneser-Vermutung

Kommen wir nun zu einer Abschätzung der von Kneser gesuchten Zahl, der chromatischen Zahl, die er mit $\chi(K(n,k))$ bezeichnete, welche die kleinste Anzahl an Farben angeben soll, die für eine zulässige Färbung der Kneser-Graphen erforderlich sind.
Dazu drücken wir das Kneser-Problem geschickter aus. Wir wollen die Menge $V(n,k)$ als disjunkte Vereinigung von möglichst wenigen Farbklassen V_i schreiben, wir suchen also eine formale Darstellung

$$V(n,k) = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} ... \dot{\cup} V_{\chi(K(n,k))}.$$

Jede dieser V_i ist kantenfrei, also eine Familie von paarweise sich schneidenden k - Mengen aus $V(n,k)$ (da die Färbung ansonsten nicht zulässig wäre). Dass die Klassen disjunkt sind, folgt aus der Definition der Färbung eines Graphen, die jedem Objekt genau eine Farbe zuweist. Es gibt also kein Objekt, das in zwei verschiedenen Farbklassen liegt.
Eine einfache Färbung erhält man mit $d+2$ Farben:
Für $i = 1, 2, ..., d+1$ sei
$V_i := \{$k - Menge K aus $V(n,k)$: i ist das kleinste Element von $K\}$.

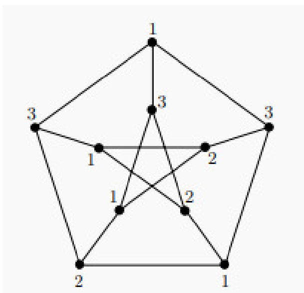


Abbildung 2: Färbung des Peterson-Graphen nach diesem Schema

1) Starte mit V_1. Wähle alle k - Mengen $K \in V(n,k)$ mit $1 \in K$. Insbesondere sind das alle k - Mengen, deren kleinstes Element die 1 ist.
2) Wähle nun alle k - Mengen $K \in V(n,k) \setminus V_1$ mit $2 \in K$ für V_2. Da alle k - Mengen, die ein kleineres Element enthalten bereits aussortiert sind, sind das insbesondere alle k - Mengen, deren kleinstes Element die 2 ist.
3) ...
...
...

d+1) $V_{d+1} = \{K \in V(n,k) \setminus \bigcup_{i=1}^{d} V_i : d+1 \in K\}$

Dann sind alle k - Mengen, die das Element 1, 2, ..., oder d+1 enthalten bereits verteilt. Für die restlichen k - Mengen gilt daher
$K \subseteq \{d+2, d+3, ..., 2k+d\} := D$. Wir stellen fest, dass $|D| = 2k-1 < 2k$, also bilden die restlichen Objekte eine kantenfreie Menge (siehe 1.3), wir können die Farbe d+2 für sie verwenden.
Damit haben wir gezeigt: $\chi(K(2k+d,k)) \leq d+2$,
also die chromatische Zahl nach oben abgeschätzt. Kneser vermutete, dass diese obere Schranke gerade die gesuchte chromatische Zahl sei:

Kneser-Vermutung: $\chi(K(2k+d,k)) = d+2$

2 Der Beweis der Kneser-Vermutung

2.1 Vorbereitung des Beweises

2.1.1 Grundbegriffe

Wir klären zunächst ein paar Grundbegriffe, die für die folgenden Abschnitte wichtig sind.
Die **d-dimensionale Einheitssphäre** S^d (kurz: d-Sphäre) ist definiert durch $S^d := \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : ||x|| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$. Sie ist nichts anderes als der Rand der abgeschlossenen Einheitskugel um den Ursprung. Im Folgenden beziehen wir uns auf S^d als metrischen Raum als Teilmenge des metrischen Raums $\mathbb{R}^{d+1}$.
Die **offene Hemisphäre mit dem Pol x** H_x ist eine der Hälften der Sphäre, welche durch den Schnitt mit einer Hyperebene durch ihren Mittelpunkt entsteht, wobei die Schnittmenge (der jeweilige Äquator) nicht inbegriffen ist, wodurch H_x offen in S^d ist. $x \in H_x$ ist der Punkt mit dem weitesten Abstand zur Hyperebene, oder anders ausgedrückt: x ist der Schnittpunkt der Hemisphäre mit der zur Hyperebene senkrechten Gerade durch den Mittelpunkt.

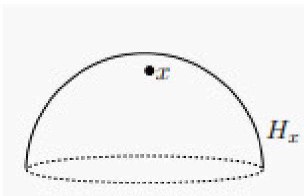


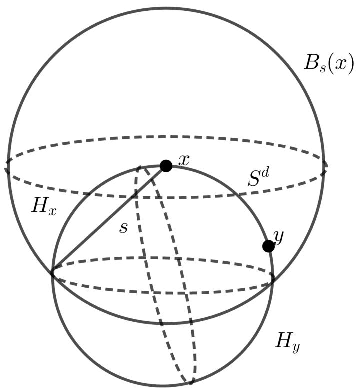
Abbildung 3: Die offene Hemisphäre mit dem Pol x

Mit **gegenüberliegenden Punkten (Antipoden)** bezeichnet man zwei Punkte auf der Sphäre, die sich *diametral* gegenüberliegen, was bedeutet, dass ihre Verbindungsstrecke durch den Kugelmittelpunkt verläuft. Fassen wir diese Punkte als Vektoren auf, so bedeutet dies, dass ihre Summe gerade dem Ursprung entspricht. Dies rechtfertigt die Schreibweise $x^*, -x^* \in S^d$.

2.1.2 Vorbereitende Sätze

Bevor wir die Kneser-Vermutung beweisen, benötigen wir noch einige vorgreifende Sätze. Diese werden in diesem Kapitel behandelt. Beginnen wir mit dem folgenden Satz:

> **Hilfssatz:** *Seien $x, y \in S^d$. Dann ist $y \in H_x$ genau dann, wenn $x \in H_y$.*



Beweis:
Seien x, y zwei Punkte auf der d-Sphäre, wobei $y \in H_x$. Wir konstruieren die offene Kugel mit dem Radius s (vgl. Skizze) um den Punkt x durch $B_s(x) \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$. Dann gilt nach Konstruktion
$B_s(x) \cap S^d = H_x$, also $H_x \subseteq B_s(x)$.

$\Rightarrow y \in B_s(x) \Rightarrow d(x, y) < s \Rightarrow d(y, x) < s \Rightarrow x \in B_s(y)$.

Da $x \in S^d$ folgt $x \in S^d \cap B_s(y) = H_y$.
Rückrichtung analog. $\square$

Als nächstes stellen wir den Borsuk-Ulam-Satz vor, der in Karol Borsuks berühmtem Aufsatz aus dem Jahre 1933 erstmals bewiesen wurde und ein breites Anwedungsfeld findet.

Borsuk-Ulam-Satz:
Für jede stetige Abbildung $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ von der d-Sphäre in den d-dimensionalen Raum gibt es gegenüberliegende Punkte $x^*, -x^*$, die auf denselben Punkt $f(x^*) = f(-x^*)$ abgebildet werden.

Für einen vollständigen Beweis dazu sei auf den Aufsatz "Drei Sätze über die n-dimensionale Sphäre"(Karol Borsuk), sowie das Buch " A combinatorial proof of Kneser's conjecture"(J. Matoušek) verwiesen.
Ein anschauliches Beispiel für den von Stanislaw Ulam entdeckten Zusammenhang gibt uns die Physik. Es ist bekannt, dass die Temperaturverteilung auf der Erdoberfäche stetig ist. Nehmen wir nun zwei gegenüberliegende Punkte am Äquator, wobei die Temperaturen unterschiedlich seien, ohne Einschränkung habe der Punkt A zu Beginn ($t_0 = 0$) eine warme Temperatur, der Punkt B eine kalte Temperatur, also $T(B(t_0)) < T(A(t_0))$. Bewegt man nun diese Punkte gleichmäßig und stetig entlang des Äquators im Uhrzeigersinn auf den Startpunkt des jeweils anderen zu, so muss im Laufe der Bewegung die Temperatur von A abnehmen, während die Temperatur von B steigt, da nach Umlauf des halben Äquators $A(t_h) = B(t_0)$, sowie $B(t_h) = A(t_0)$ gilt, da sich der Punkt B nun dort befindet, wo A gestartet war und umgekehrt. Das bedeutet $T(B(t_h)) > T(A(t_h))$. Man bemerke, dass sich die beiden Punkte während des gesamten Ablaufs stets diametral gegenüberliegen aufgrund der synchronen, gleichmäßigen Bewegung.
Nach dem Zwischenwertsatz muss es einen Zeitpunkt t^* geben mit $T(A(t^*)) = T(B(t^*))$ wegen der stetigen Komposition aus Temperatur und Bewegung. Wir haben also zwei Punkte $x^* := A(t^*), -x^* := B(t^*)$ gefunden, die dem obigen Satz genügen.

Kommen wir nun zum zentralen Satz, von dem wir im Beweis der Kneser-Vermutung Gebrauch machen werden. Dieser taucht zwar auch im berühmten Aufsatz von Borsuk auf, allerdings verwenden wir hier eine Version von Lysternik und Shnirel'man, die in ihren Bedingungen durch Joshua Greene noch entschärft wurde, was die Anwendungsmöglichkeiten zum einen erweitert und zum anderen vereinfacht.

Satz von Lysternik-Snirel'man:
Wenn die d-Sphäre S^d durch d+1 Mengen überdeckt wird,
$S^d = U_1 \cup ... \cup U_d \cup U_{d+1}$,
wobei jede der ersten d Mengen $U_1, U_2, ..., U_d$ entweder offen oder abgeschlossen S^d sind, dann enthält eine der d+1 Mengen ein Paar von gegenüberliegenden Punkten $x^*, -x^*$.

Beweis:
Sei $S^d = U_1 \cup ... \cup U_d \cup U_{d+1}$ eine Überdeckung mit den beschriebenen Eigenschaften. Angenommen, keine der U_i enthält gegenüberliegende Punkte.

Wir definieren die Abbildung $f : S^d \to \mathbb{R}^d$ durch

$$f(x) := (d(x,\ U_1), d(x,\ U_2), ..., d(x,\ U_d)).$$

Dann ist f stetig, da der Abstand des Punktes x zur Menge U_i stetig von x abhängt und somit jede einzelne Komponente der Abbildung mit
$x \mapsto d(x,\ U_i)$ stetig ist. Der Borsuk-Ulam-Satz sagt uns jetzt, dass es Antipoden $x^*, -x^*$ gibt mit $f(x^*) = f(-x^*)$.
Da nach Voraussetzung die Menge U_{d+1} keine gegenüberliegenden Punkte enthält, muss mindestens einer der Punkte $x^*, -x^*$ in einer der
$U_i,\ i = 1, 2, ..., d$ enthalten sein. OBdA sei diese Menge U_k $(k \leq d)$, mit $x^* \in U_k$.
Insbesondere ist dann $d(x^*,\ U_k) = 0$ und da nach Borsuk-Ulam
$f(x^*) = f(-x^*)$, folgt

$$d(-x^*,\ U_k) = 0, \tag{1}$$

da insbesondere die k-ten Komponenten der Funktionswerte von x^* und $-x^*$ übereinstimmen. Angewandt auf die geschickt gewählte Abstandsfunktion f, verrät uns Borsuk-Ulam somit die Lage des Punktes $-x^*$.
Wegen (1) ist $-x^*$ ein Berührpunkt der Menge U_k.

Wenn nun U_k abgeschlossen ist, folgt aus (1): $-x^* \in U_k$. $\lightning$
Dies ist ein Widerspruch, da U_k nach Annahme keine Antipoden enthält.

Wenn U_k offen ist, folgt aus (1): $-x^* \in \overline{U_k}$.
Der Berührpunkt $-x^*$ liegt also mindestens im Abschluss von U_k. Insbesondere ist $\overline{U_k} \subseteq S^d \setminus (-U_k)$,
da U_k im Komplement der Menge $-U_k$ liegt, denn $-U_k$ ist gerade die Menge aller gegenüberliegenden Punkte von U_k, und wegen unserer Annahme müssen die beiden Mengen disjunkt sein. Weiterhin folgt aus der Offenheit von U_k die Offenheit von $-U_k$, wodurch ihr Komplement abgeschlossen wird. Da nun der Abschluss von U_k die kleinste abgeschlossene Menge ist, welche U_k enthält, folgt das obige Mengenverhältnis.
Daraus können wir schließen, dass $-x^* \in S^d \setminus (-U_k)$, das bedeutet $-x^* \notin -U_k$, woraus folgt $x^* \notin U_k$. $\lightning$

Also enthält ein $U_i,\ i = 1, 2, ..., d+1$ die Antipoden $x^*, -x^*$. $\square$

Mit diesen beiden Sätzen haben wir zwei mächtige Werkzeuge in der Hand, um die Kneser-Vermutung zu beweisen. Wir brauchen noch eine letzte Voraussetzung, um den Beweis durchführen zu können, welche vom folgenden Satz inspiriert worden sein mag:

> **Satz von Gale:**
> *Es gibt eine Anordnung von $2k + d$ Punkten auf der Sphäre S^d, sodass jede offene Hemisphäre mindestens k von diesen Punkten enthält.*

Aus der Existenz einer solchen Anordnung folgt insbesondere, dass es eine Anordnung gibt, sodass auf jedem Schnitt der Hyperebene durch den Mittelpunkt der Sphäre höchstens $(2k + d) - (k + k) = d$ Punkte liegen (man betrachte dazu den Spezialfall zweier Hemisphären mit gegenüberliegenden Polen). Diese entschärfte Anordnung verlangt Joshua Greene für seinen Beweis. Er formuliert die Anordnung von $2k + d$ Punkten auf der $d + 1$-Sphäre in *allgemeiner Lage*, was bedeutet, dass höchstens $d + 1$ dieser Punkte auf einer Hyperebene durch den Mittelpunkt der Sphäre S^{d+1} liegen dürfen. Dies ist offensichtlich für $d \geq 0$ möglich, weil die zu verteilenden Punkte endlich sind, die Schnittkreise aber überabzählbar.

> **Beispiel:** ($d = 0$) Verteile die $2k$ Punkte auf einer Hälfte des Kreises S^1. Dann liegt auf jeder Hyperebene durch den Mittelpunkt (hier: Gerade) höchstens $d + 1 = 1$ Punkt.

So spart sich Greene den Satz von Gale.

2.2 Beweis der Kneser-Vermutung

Um die Kneser-Vermutung zu beweisen, formulieren wir sie zunächst in eine Existenzaussage um:

> **Satz:** *Wenn die Familie der k - Teilmengen von $\{1, 2, ..., 2k + d\}$ in $d + 1$ Klassen aufgeteilt wird, $V(n, k) = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} ... \dot{\cup} V_{d+1}$, dann enthält V_i für mindestens ein i ein Paar A, B von disjunkten k - Teilmengen.*

Beweis:
Sei $n = 2k + d,\ k \geq 1,\ d \geq 0,\ k, d \in \mathbb{N}$. Wir identifizieren jedes Element der Menge $\{1, 2, ..., 2k + d\}$ mit einem Punkt auf dem metrischen Raum S^{d+1}. Für die Zuordnung wählen wir solche Punkte aus S^{d+1}, sodass diese $2k + d$ Punkte in allgemeiner Lage angeordnet sind. Einfachheitshalber bezeichnen wir den jeweiligen Punkt mit der Ziffer des Elements.
Angenommen, die Menge $V(n, k)$ kann in $d+1$ Farbklassen aufgeteilt werden mit $V(n, k) = V_1 \dot{\cup} V_2 \dot{\cup} ... \dot{\cup} V_{d+1}$.

Wir zeigen, dass dann ein Paar von disjunkten k - Mengen A, B existiert, die zur selben Klasse V_i gehören, es also ein Paar benachbarter Ecken derselben Farbklasse gibt.

Wir definieren für $i = 1, 2, ..., d + 1$:
$O_i := \{x \in S^{d+1}$: die offene Hemisphäre H_x mit dem Pol x enthält eine k - Teilmenge aus $V_i\} \subseteq S^{d+1}$,
wobei hier die k - Teilmenge die Menge der den k Elementen aus jener Menge zugeordneten Punkte beschreibt.

Wir zeigen jetzt, dass die O_i offen sind.
Sei V_i fixiert. OBdA seien $l_1, l_2, ..., l_k \in A$ die Elemente von A für ein $A \in V_i$.
Wir spalten die Menge O_i in ihre Untermengen auf, dazu definieren wir:
$L_j := \{x \in S^{d+1} : l_j \in H_x\}$.
Dann ist $L_j = H_{l_j}$, denn für $x \in S^{d+1}$ gilt:

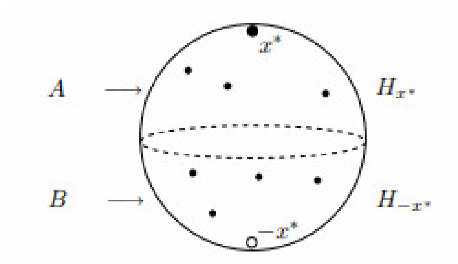
Sei $x \in H_{l_j} \xRightarrow{\text{Hilfssatz}} l_j \in H_x \xRightarrow{\text{Def. } L_j} x \in L_j$, also $H_{l_j} \subseteq L_j$

Sei $x \notin H_{l_j} \xRightarrow{\text{Hilfssatz}} l_j \notin H_x \xRightarrow{\text{Def. } L_j} x \notin L_j$, also $L_j \subseteq H_{l_j}$.

Wir fassen zusammen: $L_j = H_{l_j},\ \forall j = 1, 2, ..., k$ für eine k - Menge $A = \{l_1, ..., l_k\} \in V_i$. Also sind die L_j offen, da die H_{l_j} offen in S^{d+1} sind.

Wir definieren eine weitere Menge:
$U_A := \{x \in S^{d+1} : H_x \text{ enthält die k - Menge } A \text{ aus } V_i\}$
$\quad = \bigcap\limits_{j=1}^{k} L_j$,
denn der Schnitt über alle L_j ist gerade die Menge aller Punkte x, deren Hemisphäre alle k Elemente der Menge A enthält. Als endlicher Schnitt offener Mengen ist U_A wieder offen.
Insgesamt folgt: $O_i = \bigcup\limits_{A \in V_i} U_A$, welche als Vereinigung offener Mengen ebenfalls offen ist.

Als nächstes definieren wir die abgeschlossene Menge $C := S^{d+1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{d+1} O_i$. Dann überdecken die O_i zusammen mit C die $d+1$-Sphäre.
Nach dem Satz von Lysternik und Shnirel'man muss dann eine dieser Mengen gegenüberliegende Punkte $x^*, -x^*$ enthalten. In C können sie nicht liegen! Denn wenn $x^*, -x^*$ in C liegen, liegen sie nicht in $\bigcup\limits_{i=1}^{d+1} O_i$, aus der Definition der O_i folgt dann, dass H_{x^*} und H_{-x^*} weniger als k Punkte der Menge $\{1, 2, ..., 2k + d\}$ enthalten.



Das heißt aber, dass sie höchstens $k - 1$ Punkte enthalten. Da die beiden Hemisphären jeweils eine Hälfte der Sphäre überdecken, impliziert dies wiederum, dass mindestens $(2k+d)-2(k-1) = d+2$ Punkte auf dem Schnittkreis $\overline{H}_{x^*} \cap \overline{H}_{-x^*}$ liegen, also auf einer Hyperebene durch den Mittelpunkt.
Das kann aber nicht der Fall sein, da die Punkte in allgemeiner Lage gewählt waren. Folglich enthält einer der Mengen O_i die Antipoden $x^*, -x^*$, also gibt es k - Mengen derselben Farbklasse $A, B \in V_i$ mit $A \subseteq H_{x^*},\ B \subseteq H_{-x^*}$ nach Definition der O_i.
Da wir offene Hemisphären betrachten, sind H_{x^*} und H_{-x^*} disjunkt $\Rightarrow$
A und B sind disjunkt, also benachbart in $V(n,k)$ und derselben Farbklasse.
□

Also kann die Eckenmenge $V(n,k)$ nicht in $d+1$ Klassen aufgeteilt werden, da gezeigt wurde, dass keine zulässige Färbung erfolgen kann. Daher gilt

$$d+1 < \chi(K(n,k)) \leq d+2$$

$$\Rightarrow \chi(K(n,k)) = d+2.$$

Die Kneser-Vermutung ist somit bewiesen.

3 Literatur

M. Aigner, G. M. Ziegler, Das Buch der Beweise. Springer, 5. Auflage.